

# L'espace en mathématiques

## Introduction à la topologie

Pierre Saurel

# Plan

1. Ouverts, fermés, connexes, compacts
2. Espaces topologiques
3. Les espaces métriques
4. Les espaces vectoriels normés
5. Les éléments qui composent l'espace
6. Les espaces définis par leur structure
7. Discussion

Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Les fermés

Trivialement : un espace fermé est un espace tel que les bords sont partie intégrante de cet espace. Un fermé est un ensemble dans lequel on peut atteindre les bords

Exemple : un singleton  $\{3\}$  ou encore une union finie de singletons ou encore  $[0 ; 1]$

Prop :

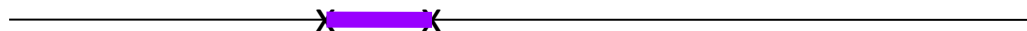
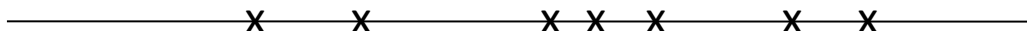
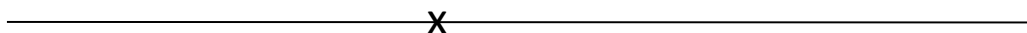
Toute réunion finie de fermés est un fermé donc les ensembles finis sont fermés.

Toute intersection de fermés est un fermé

Exemple de situation particulière :  $U[-n ; n]$

Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Les fermés



# Points d'accumulation : complément sur les fermés

Def : Un point d'accumulation d'une partie  $A$  d'un espace  $E$  est un élément de  $E$  qui peut être approché par une suite d'éléments de  $A$

Def : On appelle adhérence de  $A$  l'ensemble des points d'accumulation de  $A$

Def 2 : un espace  $A$  est fermé s'il contient tous ses points d'accumulation (s'il contient son adhérence)

Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Point d'accumulation : compléments sur les fermés •



Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Les ouverts

Def : un ouvert est le complémentaire d'un fermé dans un espace  $E$  (topologique et donc pas quelconque)

Trivialement : un ouvert est un ensemble qui ne possède pas de frontière

Exemple :  $]0 ; 1[$                       Contre-exemple :  $]0 ; 1]$

Prop :

Toute réunion d'ouverts est un ouvert

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert

Exemple de situation particulière :  $\cap ]-1/n ; 1/n[$

Ouverts, fermés, connexes, compacts

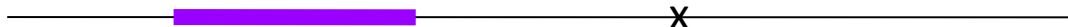
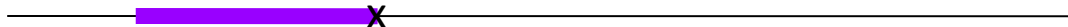
# Les ouverts





Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Ni ouverts ni fermés



Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Densité

Def : un sous-ensemble  $A$  est dense dans  $E$  si l'adhérence de  $A$  est égale à  $E$

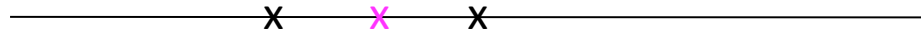
Trivialement : un sous-ensemble de  $A$  est dense dans  $E$  si lorsque l'on choisit un élément de  $E$ , on peut trouver des éléments de  $A$  aussi proches que l'on veut de  $E$

Exemple : Nombre infini de nombres décimaux entre 0,9 et 0,91

Prop : densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$

Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Densité



Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Les espaces connexes

Def : un espace  $E$  est connexe si ses seuls sous-espaces ouverts et fermés sont  $E$  et l'ensemble vide  $\emptyset$

Trivialement : un espace  $E$  est connexe s'il est d'un seul tenant

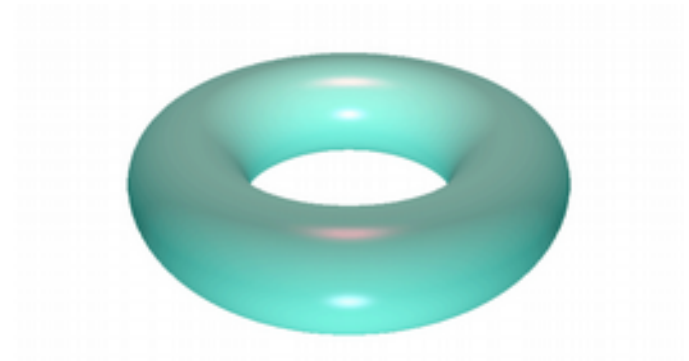
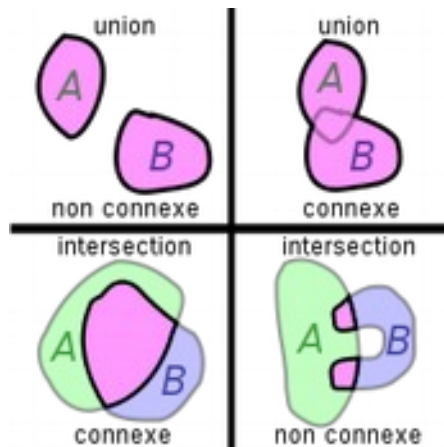
Def : un espace  $E$  est connexe par arc s'il est possible de relier deux points de  $E$  par un chemin d'éléments de  $E$

Prop : connexité par arc de certains graphes

Notion de composante connexe et rôle des composantes connexes comme classes d'équivalences

Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Les espaces connexes



Ouverts, fermés, connexes, compacts

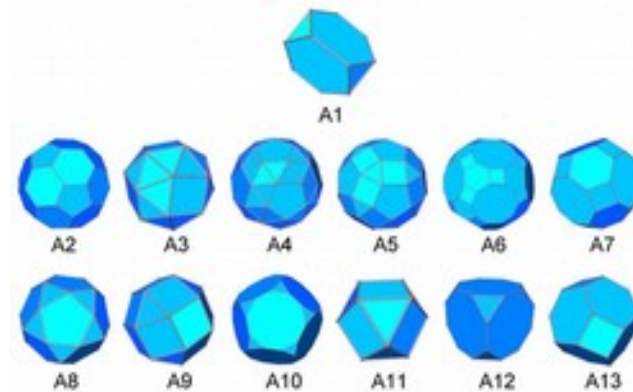
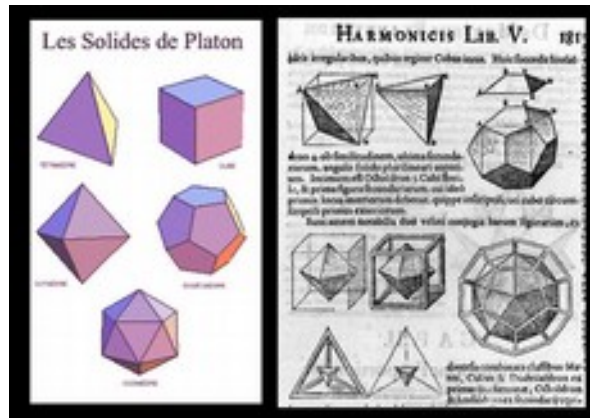
# Les espaces convexes

Def : un espace  $E$  est convexe si le segment entre deux points de  $E$  est constitué d'éléments qui sont tous dans  $E$

Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Les espaces convexes/ non convexes

5 solides de Platon (convexes, Thétète vers -400) 13 solides archimédiens (convexes, Archimède vers -250)



Polyèdre de Képler-Poinsot (non convexe, 1619)



# Les compacts

Def: un espace  $E$  est compact si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini

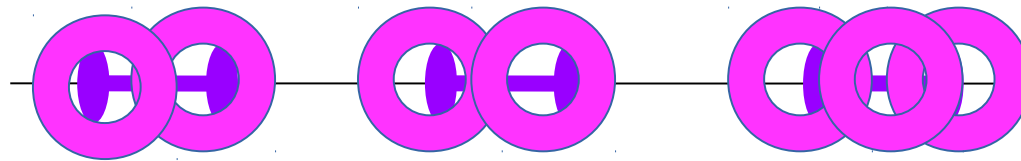
Prop: les ensembles compacts de  $\mathbb{R}^n$  sont les fermés bornés

Exemple de situation particulière :  $\bigcup [2n ; 2n+1]$

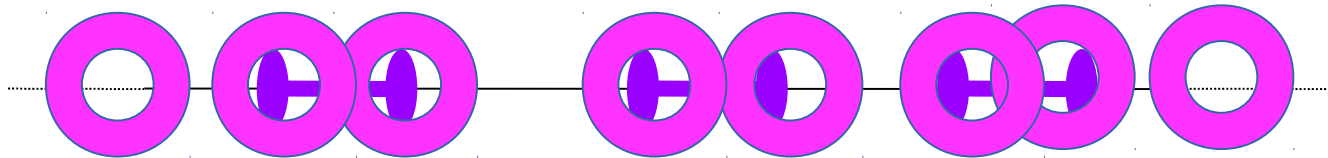


Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Les compacts : compact/non compact



Compact



Non compact

Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Quelques espaces compacts étranges : Cantor

Ensemble triadique de Cantor

Sous-ensemble de  $[0 ; 1]$

$$K = \bigcap A_n$$



$$A_0 = [0 ; 1] \quad A_1 = [0 ; 1/3] \cup [2/3 ; 1]$$

$$A_2 = [0 ; 1/9] \cup [2/9 ; 1/3] \cup [2/3 ; 7/9] \cup [8/9 ; 1]$$

$$A_3 = [0 ; 1/27] \cup [2/27 ; 1/9] \cup [2/9 ; 7/27] \cup [8/27 ; 1/3] \\ \cup [2/3 ; 19/27] \cup [20/27 ; 7/9] \cup [8/9 ; 25/27] \cup [26/27 ; 1]$$

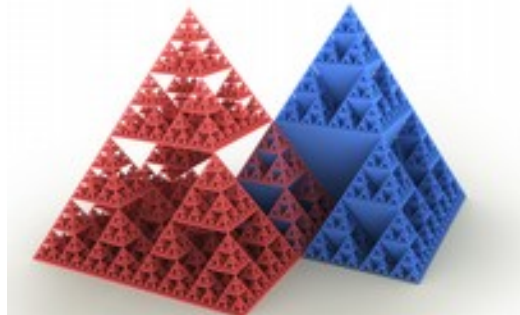
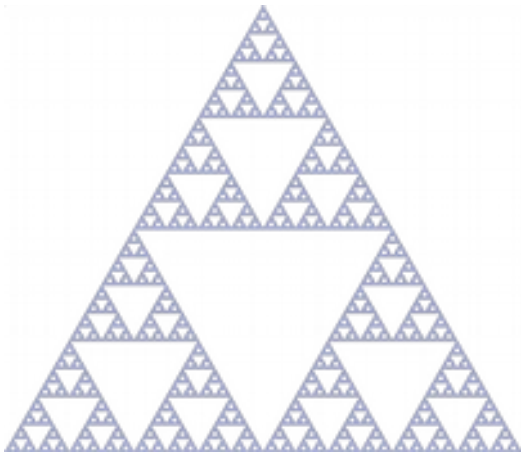
Ensemble fermé et borné donc compact, non dénombrable,  
ainsi que d'intérieur vide et de mesure nulle

Introduction à la topologie 1 - Pierre Saurel



Ouverts, fermés, connexes, compacts

# Quelques espaces compacts étranges : Sierpinski



# Les espaces topologiques

Def : un espace topologique est un ensemble  $E$  et un ensemble de parties de  $E$ , noté  $\mathcal{O}(E)$  ou  $T$  qui vérifie les trois propriétés :

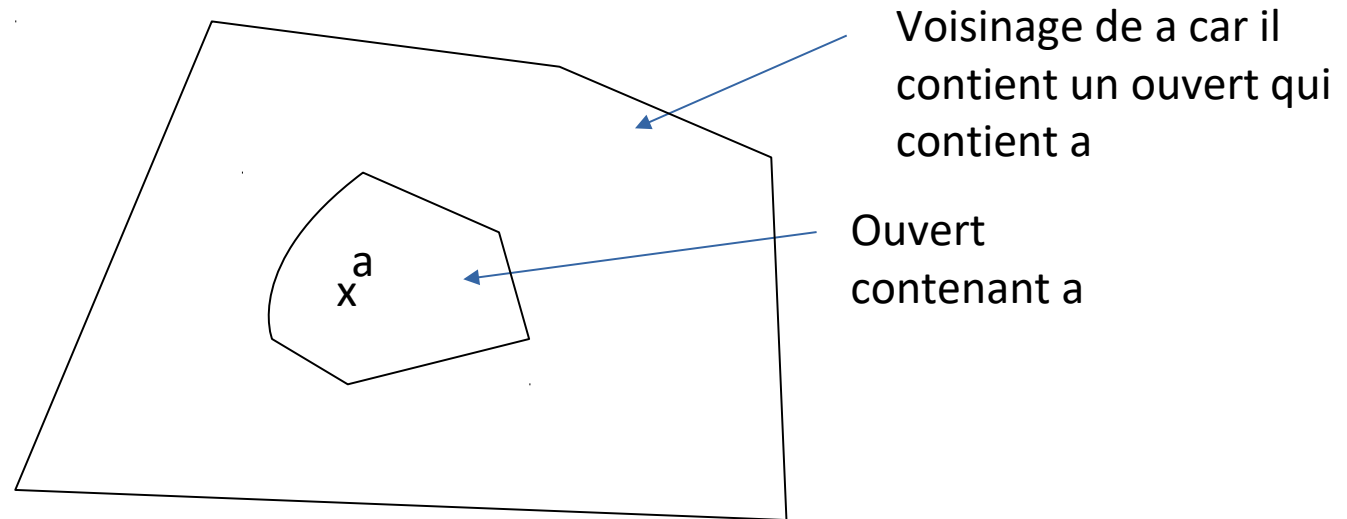
- 1)  $E$  et  $\emptyset$  appartiennent à  $T$  ;
- 2) toute réunion d'éléments de  $T$  appartient à  $T$  ;
- 3) toute intersection finie d'éléments de  $T$  appartient à  $T$  ;

Les éléments de  $T$  sont appelés les ouverts de l'espace topologique  $E$

Def 3 : Les fermés sont les complémentaires des ouverts dans  $E$

Trivialement : les espaces topologiques permettent de créer une notion de voisinage de chacun des points de l'espace  $E$

# Les espaces topologiques



# Les espaces métriques

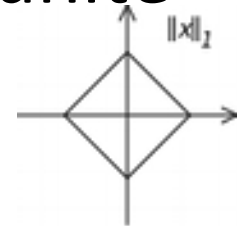
Def : un espace métrique  $E$  est un espace muni d'une distance  $d$ . C'est-à-dire une relation binaire qui à deux éléments de  $E$ ,  $a$  et  $b$  associe un réel et qui vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $d(a,b) \geq 0$  avec  $d(a,b)=0$  ssi  $a=b$  (on dit que  $d$  est positive et séparée)
- 2)  $d(a,b) = d(b,a)$  (on dit que  $d$  est symétrique)
- 3)  $d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$  (on dit que  $d$  vérifie l'inégalité triangulaire)

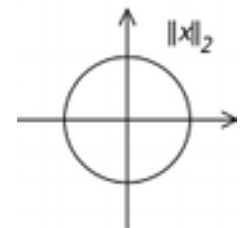
# Les espaces métriques

Exemples : avec représentation de la boule unité

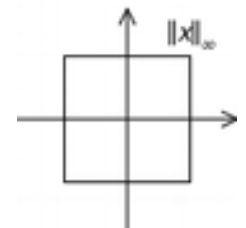
Distance de Manhattan :  $d(x,y) = \sum |x_i - y_i|$



Distance euclidienne :  $d(x,y) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$



Distance de Tchebychev :  $d(x,y) = \sup |x_i - y_i|$



# Les espaces métriques

## Autres exemples :

1) Distance de Hamming : entre deux mots de même longueur

$$d(x,y) = \text{Card}(x_i \neq y_i)$$

2) Pour les graphes non orientés : la distance entre deux nœuds est la longueur d'un plus court chemin entre ces nœuds (nombre d'arêtes ou somme des poids des arêtes empruntées).



# Les espaces métriques

## Autres exemples :

Distance ultramétrique : l'inégalité ultratriangulaire se substitue à l'inégalité triangulaire  $d(x,z) \leq \max (d(x,y), d(y,z))$

Exemple :  $d(x,y) = 0$  si  $x=y$  et si  $x \neq y$

# Les espaces bornés

Def : un sous-espace  $A$  de  $E$  est borné (dans un espace métrique) s'il est contenu dans une boule (une sphère) de diamètre fini

# Les espaces complets

Def : un espace complet est un espace métrique dans lequel toutes les suites de Cauchy sont convergentes. Une suite est de Cauchy si à partir d'un certain rang deux éléments sont aussi proches l'un de l'autre qu'on le souhaite.

Trivialement : un espace complet est un espace métrique sans trou

Exemple : pour la distance usuelle  $\mathbb{R}$  (ensemble des nombres réels) est complet et  $\mathbb{Q}$  (ensemble des nombres rationnels) n'est pas complet.

# Les espaces vectoriels normés

La norme est une extension de la valeur absolue. Elle s'applique aux vecteurs et permet de calculer une longueur de l'objet mathématiques concerné (le vecteur). On parle d'espace vectoriel normé.

Cette norme peut être issue d'un produit scalaire (ou pas).

# Les espaces vectoriels normés

On appelle espace euclidien un espace vectoriel qui dispose d'un produit scalaire. Le produit scalaire permet de mesurer l'angle entre deux vecteurs.

Les espaces euclidiens sont des espaces dans lesquels se généralisent le théorème de Pythagore et la notion d'angle droit.

Un espace hilbertien est un espace euclidien qui est complet.

Eléments qui composent l'espace

# Les points

Les points sont les objets mathématiques considérés comme naturels en géométrie.

Les droites, les plans sont respectivement des ensembles de points et des ensembles de droites.

Eléments qui composent l'espace

# Les fonctions

Les objets mathématiques qui composent l'espace peuvent être des fonctions. On parle alors d'espaces fonctionnels.

Eléments qui composent l'espace

# Les opérateurs

Les objets mathématiques qui composent l'espace peuvent être des opérateurs, c'est-à-dire par exemple des applications qui à une fonction associent une autre fonction.

Exemple : la dérivation est un opérateur



Eléments qui composent l'espace

# Les vecteurs

Les objets mathématiques qui composent l'espace peuvent être des vecteurs.

Les vecteurs peuvent être indépendants.

Cette notion est particulièrement utile en sciences humaines et sociales lorsque l'on travaille avec de très nombreux paramètres, sachant qu'il convient de déterminer combien sont indépendants (dimension de l'espace).

## Espaces définis par leur structure

L'algèbre permet d'étudier des ensembles dans lesquels les éléments peuvent opérer entre eux.

Sont alors définis des ensembles algébriques (groupe, anneau, corps, etc.)

Ces éléments constituant un ensemble algébrique définissent, par leur structure, un ensemble et donc aussi un espace.

# MERCI !